

INHOUDSTAFEL

Voorwoord	5
HOOFDSTUK 1. Basisbegrippen van Statistiek	7
1. Waarover gaat het?	9
Populaties en hun kenmerken. Variabelen	9
Kwalitatieve en kwantitatieve variabelen	10
Discrete en continue variabelen	11
Steekproeven	11
Voorstelling en betrouwbaarheid van de resultaten	12
2. Afronden en beduidende cijfers	14
Beduidende cijfers bij het meten	14
Meer voorbeelden	15
Beduidende cijfers bij het tellen	16
Afronden	17
Voorbeelden	17
Optellen en aftrekken	18
Vermenigvuldigen en delen	19
Meer voorbeelden	20
3. Een bijzondere notatie voor grote sommen	22
4. Verzamelen, ordenen en grafisch voorstellen van gegevens	24
Voorbeeld 1	24
Voorbeeld 2	30
Voorbeeld 3	33
Voorbeeld 4. Werken met ongelijke klassen	35
Voorbeeld 5	37
Andere voorstellingswijzen	38
5. Oefeningen	41
6. Centrummaten: mediaan, modus	44
Mediaan	45
Modus	46
Gepiektheid (kurtosis)	46
Scheefheid (skewness)	47
Meer voorbeelden	48
7. Andere soorten gemiddelden	50
8. Spreidingsmaten: kwartielen, decielen, percentielen	52
Het doosdiagram (boxplot)	54

9.	Spreadingsmaten: variantie, standaardafwijking, variatiecoëfficiënt	55
	De standaardafwijking	56
	De variatiecoëfficiënt	57
	Toepassing op het probleem van de groenteboer	58
	Toepassing op het probleem van de koffiebrandery	59
	Oefeningen	60
10.	De z-score	61
HOOFDSTUK 2. Basisbegrippen van Kansrekening		65
1.	Statistische experimenten. Elementaire gebeurtenissen	67
	Experiment 1	67
	Experiment 2	68
2.	Waarschijnlijkheid van elementaire gebeurtenissen	70
3.	Gebeurtenissen in het algemeen. Kansdefinitie van Laplace	71
	Kansdefinitie van Laplace	72
4.	Samenstellen van gebeurtenissen	74
	Waarschijnlijkheid van willekeurige gebeurtenissen	75
	Experiment 3	77
	Experiment 4	79
5.	Algemene definitie van een waarschijnlijkheids- of kansfunctie	80
6.	Voorbeelden en oefeningen	82
7.	Voorwaardelijke kans	85
	Experiment 5	85
	Afhankelijke en onafhankelijke gebeurtenissen	87
	Algemene regel voor voorwaardelijke kansen	88
	Boomdiagrammen	89
8.	Voorbeelden	91
9.	Oefeningen	94
10.	Stochastische veranderlijken, kansverdeling	97
	Voorbeeld 1	99
	Voorbeeld 2	100
	Voorbeeld 3	101
	Extra oefeningen	101
HOOFDSTUK 3. Discrete kansverdelingen		105
1.	De binomiale verdeling	107
	Bernoulli-experimenten	107
	Tweemaal hetzelfde Bernoulli-experiment	108
	Voorbeeld	109

Driemaal hetzelfde Bernoulli-experiment	110
Voorbeeld	111
n maal hetzelfde Bernoulli-experiment	111
Voorbeeld 1	115
Voorbeeld 2	116
2. De verdeling van Poisson	118
Inleiding	118
Voorbeeld	119
De verdeling van Poisson	121
Voorbeeld 1	121
Voorbeeld 2	122
HOOFDSTUK 4. De kansverdeling van Gauss	125
1. Continue stochastische veranderlijken	127
Voorbeeld	129
2. De normale verdeling	130
3. Kenmerken van de normale verdeling	132
4. Verband met andere verdelingen	136
Verband met de binomiale verdeling	136
Verband met de verdeling van Poisson	136
Andere klokvormige verdelingen	136
5. De standaard normale verdeling	139
6. De standaard normale verdeling – tabel 1 (L-tabel)	143
Rekenregels	144
7. De standaard normale verdeling – tabel 2 (R-tabel)	147
Rekenregels	148
8. Voorbeelden	150
Voorbeeld 1	150
Voorbeeld 2	151
Voorbeeld 3	154
Voorbeeld 4	154
HOOFDSTUK 5. Betrouwbaarheid van steekproeven	157
De verdeling van de steekproefgemiddelden	160
Het schatten van het populatiegemiddelde	162
Voorbeeld 1	163
Voorbeeld 2	164
De t -verdeling	165
Voorbeeld 3	166

HOOFDSTUK 6. Tijdsreeksen, regressie	171
1. Kenmerken van een tijdreeks	173
2. Bepaling van de trend – Voortschrijdend gemiddelde	174
Voorbeeld 1.....	174
Voorbeeld 2.....	176
3. Bepaling van de trend d.m.v. exponentiële effening	178
Voorbeeld 3.....	181
Oefeningen	182
4. Regressie	184
5. Correlatie	188
Bibliografie	193

1. WAAROVER GAAT HET?

Bij het bestuderen van groepen ontstaan er heel wat vragen waarop een antwoord op het eerste gezicht onmogelijk lijkt. Het is bijvoorbeeld niet moeilijk om van elk lid van een groep de leeftijd te bepalen, maar heeft het zin te vragen naar de leeftijd van de groep? Kunnen bijvoorbeeld op de vragen in het volgende lijstje zinvolle antwoorden geformuleerd worden?

1. Wat is het IQ van studenten van de hogeschool?
 2. Hoe groot zijn Vlaamse vrouwen?
 3. Hoe zwaar zijn Europese mannen?
 4. Hoeveel studenten zijn er per studierichting in het hoger onderwijs?
 5. Hoe warm is het in augustus op de middag in Geel?
 6. Hoe groot is het jaarlijks inkomen van arbeiders in de automobieliindustrie?
 7. Hoe groot is de levensduur van gloeilampen?
 8. Hoe groot is de afstand van de sterren?
 9. Hoeveel aandelen worden er per dag op de beurs verhandeld?
 10. Welke aandelen werden er vandaag op de beurs verhandeld?
 11. Hoeveel ogen gooit men met twee dobbelstenen?
 12. Welke kleur hebben de Nederlandse tulpen?
- ...

Om een antwoord te formuleren op de eerste vraag kan men natuurlijk van elke student afzonderlijk het IQ gaan meten. Maar wat zegt dat over de hele groep? We kunnen een aantal jaren elke middag van augustus in Geel de temperatuur meten, maar hoe formuleren we een zinvol antwoord op de vijfde vraag? Het kan toch elk jaar anders zijn.

Populaties en hun kenmerken. Variabelen

Statistiek is een wetenschappelijke methode die toelaat kenmerken te formuleren voor de hele groep, de *populatie* genoemd, afgeleid uit de kenmerken van de afzonderlijke individuen of objecten, (groeps)*elementen* genoemd. De bestudeerde kenmerken van

die elementen worden *variabelen* genoemd. De waargenomen waarden van die variabelen zijn de gegevens of *data*. Bijvoorbeeld in vraag 9 betreft het de populatie van alle aandelen. De elementen van die populatie zijn de aandelen. De bestudeerde variabele is het aantal ervan dat per dag op de beurs wordt verhandeld. Dat aantal kan elke dag opnieuw worden vastgesteld en opgetekend voor statistisch onderzoek.

Kwalitatieve en kwantitatieve variabelen

Sommige kenmerken kunnen niet met getallen worden uitgedrukt. In vraag 12 wordt gevraagd naar de kleur van de Nederlandse tulpen. De populatie is hier de verzameling van alle Nederlandse tulpen. De bestudeerde variabele is de kleur van die tulpen, de data zijn de verschillende kleuren die tulpen kunnen hebben. Ook op vraag 10 zijn de mogelijke antwoorden geen getallen maar de titels van de verhandelde stukken. Dergelijke variabelen (of kenmerken) worden *kwalitatieve variabelen* genoemd. Men onderscheidt daarbij twee soorten kwalitatieve variabelen. *Ordinale variabelen* zijn bijvoorbeeld: politieke voorkeur (links, centrum, rechts), inkomensklasse (laag, modaal, hoog), beoordelingen (zeer slecht, slecht, normaal, goed, zeer goed). Tussen de gegevens bestaat wel een zekere rangorde die soms wordt aangeduid met een getal (bijvoorbeeld op een schaal van 1 tot 5), maar deze cijfers geven dan enkel een rangorde aan. Het heeft weinig zin met deze getallen te gaan rekenen. *Nominale variabelen* betreffen gegevens die elkaar uitsluiten en waartussen helemaal *geen* rangorde bestaat. Bijvoorbeeld een classificatie op basis van kleuren (rood, oranje, geel, groen), geslacht (man, vrouw, hetero, homo), beroep, nationaliteit, politieke partij, Zelfs hier worden de verschillende mogelijkheden wel eens met getallen voorgesteld (elke partij krijgt bijvoorbeeld bij verkiezingen een nummer), maar rekenen met deze getallen is totaal zinloos.

De levensduur van gloeilampen (vraag 7) of het aantal aandelen dat per dag op de beurs wordt verhandeld (vraag 9) is *wel* numeriek uit te drukken. Dergelijke kenmerken of variabelen heten *kwantitatieve variabelen*.

Discrete en continue variabelen

Bij de kwantitatieve variabelen onderscheidt men dan weer *discrete* en *continue* variabelen. De grootte van de Vlaamse vrouwen kan zonder uitzondering elke waarde aannemen tussen een kleinste en een grootste waarde. Geen enkele daartussen liggende waarde kan bij voorbaat uitgesloten worden. Hetzelfde kan gezegd worden van het gewicht van de Europese mannen, van de levensduur van gloeilampen, enz. Dergelijke kenmerken of variabelen worden continu genoemd. Het aantal studenten per groep in het hoger onderwijs is natuurlijk ook begrepen tussen een kleinste en een grootste waarde, maar blijft beperkt tot de gehele waarden daartussen. Elke niet gehele waarde is daarbij wel degelijk bij voorbaat uitgesloten. Dergelijke kenmerken of gegevens heten dan discreet of discontinu. De waarden van continue variabelen zijn het resultaat van metingen. De waarden van discrete kenmerken zijn meestal het resultaat van tellingen.

In een eerste fase van statistisch onderzoek worden de gegevens over de afzonderlijke elementen *verzameld en geordend*. In een tweede fase worden deze gegevens *geanalyseerd* en *geïnterpreteerd* om het systematische van het toevallige te scheiden, en zo eventuele trends, voorkeuren, verbanden ... op het spoor te komen. Statistiek kan daardoor een belangrijk hulpmiddel zijn bij *besluitvorming*.

Steekproeven

In veel gevallen is het echter onmogelijk daadwerkelijk de hele populatie te bestuderen. Bijvoorbeeld, in een welbepaalde hogeschool kan eventueel nog van elk student het IQ bepaald worden. Maar aan het meten van het gewicht van alle Europese mannen willen we niet eens beginnen, en aan het bepalen van de afstand van alle sterren *hoeven* we niet eens te beginnen. In dergelijke gevallen wordt steeds gewerkt met een *steekproef*, wat slechts een hanteerbaar deel van de populatie is. Dat is echter slechts zinvol als het een *representatief* deel van de populatie is. Representatief wil hier zeggen dat de elementen van de steekproef zodanig werden gekozen dat verwacht mag worden dat de conclusies uit de steekproef ongeveer dezelfde zullen zijn als voor de hele populatie.

De keuze van de steekproef is dus een zeer belangrijk en heel dikwijls een onderschat onderdeel van het statistische werk. De vereiste representativiteit ervan is heel dikwijls moeilijk te verzekeren. Als we bijvoorbeeld een antwoord willen op onze derde vraag, de vraag naar het gewicht van Europese mannen, hoe moet die steekproef dan samengesteld worden? Moeten we uit elk Europees land een aantal mannen opnemen in verhouding tot het bevolkingsaantal van dat land? Of heeft nationaliteit geen invloed op het gewicht? Is het bijvoorbeeld belangrijker te letten op de juiste verhoudingen in verband met sportiviteit, woonplaats (stad, platteland, hooggebergte, ...), leeftijd, beroepsactiviteit, eet- en drinkgewoontes ... ? Indien gestreefd wordt in de steekproef verhoudingsgewijs dezelfde samenstelling te realiseren als in de populatie zelf, dan spreekt men van een *gerichte of gestratifiëerde steekproef*. Laat men daarentegen het zuivere toeval beslissen welke elementen uit de populatie in de steekproef worden opgenomen (bijvoorbeeld door lottrekking), dan spreekt men van een *aselecte* steekproef. Bij elk statistisch probleem is echter de vraag naar de representativiteit van de steekproef (eventueel meerdere steekproeven) opnieuw aan de orde.

Voorstelling en betrouwbaarheid van de resultaten

Eenmaal de steekproef samengesteld, kan het eigenlijk statistisch onderzoek beginnen. De resultaten worden geformuleerd aan de hand van allerlei *gemiddelden, spreidingen, tendensen, correlaties*, ... en kunnen op verschillende manieren grafisch worden voorgesteld zoals in *histogrammen, frequentiepolygonen*, In de volgende hoofdstukken wordt daar uitvoerig op ingegaan.

Conclusies op grond van één steekproef moeten echter steeds met enige reserve worden behandeld. Er is geen totale zekerheid dat ze overeenkomen met de conclusies die zouden volgen uit een daadwerkelijke studie van de hele populatie. Dit probleem kan gedeeltelijk worden opgevangen door meerdere, onderling onafhankelijke steekproeven uit te voeren en de bekomen steekproefresultaten op hun beurt statistisch te behandelen. Voor elke steekproef afzonderlijk kan dan geschat worden hoe waarschijnlijk het is dat de gevonden resultaten betekenisvol zijn, dat ze werkelijk kenmerkend zijn voor de hele populatie en niet te wijten aan toevaligheid. Over deze 'betrouwbaarheid' van steekproeven wordt iets verteld in hoofdstuk 5.

TE ONTHOUDEN

Populatie: een verzameling mensen, dieren, objecten, ..., *elementen* genoemd, waarvan enkele mogelijke kenmerken worden onderzocht.

Steekproef: een representatief deel van de populatie, gebruikt als die populatie zelf zeer groot is. De representativiteit wordt verzekerd door de steekproef *aselect* of *gestratificeerd* samen te stellen.

Variabelen: de bestudeerde kenmerken van de elementen van de populatie.

Data: de waargenomen of gemeten waarden van die variabelen.

Kwantitatieve variabelen: variabelen die numerieke waarden aannemen bekomen door telling, meting of berekening. Ze kunnen *continu* zijn of *discreet*.

Kwalitatieve variabelen: variabelen die niet numeriek kunnen behandeld worden. Ze kunnen *ordinaal* zijn of *nominaal*.

Andere besproken thema's worden in de volgende hoofdstukken verder uitgewerkt.

2. AFRONDEN EN BEDUIDENDE CIJFERS

Getallen waarmee in de statistiek gewerkt wordt, zijn steeds het resultaat van metingen of tellingen. Lengtes, temperaturen, gewichten, concentraties, volumes, hoeveelheden, ... worden gemeten of geteld. De resultaten van die metingen en tellingen wordt uitgedrukt met getallen, en getallen worden voorgesteld d.m.v. cijfers.

Beduidende cijfers bij het meten

Bij het meten worden steeds fouten gemaakt. Gebruiken we een meetlint met een schaalverdeling tot op een millimeter nauwkeurig, dan levert de meting van de lengte van een staaf bijvoorbeeld een resultaat van 3,241 meter of 3241 millimeter. Kunnen we er zeker van zijn dat het dan precies 3,241 m is? Of zou het gebruik van een ander nauwkeuriger meetinstrument misschien 3,241001 als resultaat opleveren of 3,240922? Hoeveel decimalen heeft de werkelijke waarde eigenlijk? Blijft het wel bij een eindig aantal? Het antwoord op dergelijke vragen is natuurlijk onbekend. Anders was het niet nodig de meting uit te voeren.

Maar steunend op de precisie van het meettoestel, kunnen we in boven staand voorbeeld garanderen dat onze meting in elk geval tot op één millimeter nauwkeurig is. Het verschil met de onbekende werkelijke waarde is hoogstens 1 mm, en in nogal wat toepassingen is een fractie van een millimeter meer of minder niet belangrijk. We zijn dan tevreden met de behaalde nauwkeurigheid. Willen we toch een nauwkeurigere meting, dan moeten we nauwkeurigere en dus duurdere meetapparatuur gebruiken. Met geschikte meetapparatuur kunnen meetfouten heel klein worden gehouden, maar ze zijn nooit nul.

In ons voorbeeld kunnen we garanderen dat onze meting hoogstens 1 mm fout is. Men zegt dat de *absolute fout* op deze meting 1 mm bedraagt. Er is dus enige twijfel over het laatste cijfer (de 1 in 3,241). Het is hoe dan ook het laatste cijfer in het getal dat nog verantwoord kan worden aan de hand van de meting.

Is een meetfout van hoogstens 1 mm een kleine fout? Als het gemeten object zelf slechts enkele mm groot is, bijvoorbeeld 12 mm, dan kan de fout oplopen tot $1/12 = 0,083/100 = 8,3\%$ van de eigenlijke waarde¹. Als het gemeten object zelf 3241 mm groot is, dan kan de fout oplopen tot $1/3241 = 0,0003 = 0,03/100 = 0,03\%$.

De absolute fout alleen zegt dus niet alles over de meting. Ook de *relatieve fout*, gedefinieerd als de verhouding van de absolute fout tot de gemeten waarde, vertelt iets over de waarde van de meting.

Men zegt dat onze meting van 3,241 m vier beduidende cijfers heeft. Het eerste is de 3, het laatste de 1. Om het even welk vierde cijfer na de komma zou zinloos zijn. Ook aanvullen met nullen is zinloos. Een nul als vierde cijfer na de komma zou betekenen dat de meting nauwkeurig is niet tot op 1 mm maar tot op 0,1 mm.

Meer voorbeelden

“Er werd 48,3 liter benzine getankt”. Het opgegeven getal bevat drie beduidende cijfers. Het eerste is 4 en het laatste is 3.

“Die afstand bedraagt 560,230 meter”. Het opgegeven getal bevat zes beduidende cijfers. Het eerste is 5 en het laatste is een 0. Het schrijven van die nul betekent dat de afstand tot op één millimeter nauwkeurig gemeten werd, en dat op de derde positie na de komma wel degelijk een nul staat en geen ander cijfer. Anders mag deze nul niet geschreven worden. Onbeduidende nullen worden enkel geschreven als dit noodzakelijk is om de plaats van de komma aan te wijzen, zoals in het volgende voorbeeld.

“Deze massa bedraagt 0,005100 ton”. Hier zijn vier (4) beduidende cijfers gegeven: het eerste is 5 en de laatste twee zijn 0. De gegeven massa werd gemeten tot op één gram nauwkeurig (0,005100 ton is gelijk aan 5100 gram). Die laatste twee nullen zijn beduidende nullen. Ze zouden er anders niet mogen staan, zoals in het vorige voorbeeld werd uitgelegd. De andere nullen zijn niet beduidend. Die dienen enkel om de plaats van de komma aan te geven. Men kan ze trouwens vermijden door een geschiktere eenheid te kiezen, bijvoorbeeld kilogram i.p.v. ton, of door de

1. 8,3% is een meer gebruikelijke schrijfwijze voor $8,3/100 = 0,083$.

zogenaamde wetenschappelijke notatie te gebruiken:

$$0,005100 = 5,100 \times 10^{-3}$$

Bij het rekenen mag slechts gebruik gemaakt worden van *beduidende cijfers*. De beduidende cijfers in een getal worden geteld vanaf het eerste cijfer verschillend van nul tot het laatste cijfer dat door meting of beredenering kan verantwoord worden. Enkel voor het laatste beduidend cijfer is er enige twijfel omwille van de meetfout.

Nauwkeurigere meetmethodes leveren natuurlijk preciezer meetresultaten. Dat manifesteert zich in getallen met meer beduidende cijfers: hoe preciezer de meting, des te groter het aantal beduidende cijfers.

Beduidende cijfers bij het tellen

Bij het tellen van kleine hoeveelheden worden doorgaans geen fouten gemaakt. Een telling van het aantal kinderen in een welbepaald leerjaar van een welbepaalde basisschool geeft bijvoorbeeld 22 leerlingen. Op het eerste gezicht heeft dit resultaat twee beduidende cijfers, maar niets is minder waar. Dit resultaat heeft liefst oneindig veel beduidende cijfers. De betrokken onderwijzer zal kunnen garanderen dat het precies om 22,0000000... kinderen gaat, waarbij het aantal *beduidende* nullen onbeperkt is.

Bij het tellen van grote hoeveelheden wordt het wel iets moeilijker. In de opmerking dat België ongeveer 11 000 000 inwoners telt, is het duidelijk dat het niet om exact 11 000 000 inwoners gaat. Men wil bijvoorbeeld enkel maar zeggen dat het dichterbij 11 miljoen is dan bij 10 of 12 miljoen. Hoe dicht wordt verder niet vermeld.

Dit getal heeft dan slechts 2 beduidende cijfers. Die zes nullen van 11 000 000 zijn dan *niet* beduidend. Dat moet dan wel blijken uit de context waarin dat getal vermeld werd. Het is niet zonder meer van dat getal zelf af te lezen.

Die zes onbeduidende nullen kunnen echter niet zomaar weggelaten worden. Zij blijven staan om de positie van de komma aan te geven. Wie niet houdt van onbeduidende nullen moet dus weer geschiktere eenheden gebruiken² of de zgn. wetenschap-

2. In het dagelijks leven spreken we hier van 11 miljoen, of van 10,7 miljoen ... De gebruikte eenheid is dan eigenlijk 'miljoen inwoner' en niet 'inwoner'.

pelijke notatie: $1,1 \times 10^7$ in plaats van 11 000 000; of $1,0 \times 10^7$ of $1,00 \times 10^7$ in plaats van 10 000 000 naargelang er twee of drie beduidende cijfers zijn. Op dezelfde manier wordt 258 000 000 dan geschreven als $2,58 \times 10^8$ als er drie beduidende cijfers zijn, of als $2,5800 \times 10^8$ met vijf beduidende cijfers.

Afronden

Een getal afronden betekent, dat het aantal beduidende cijfers ervan *bewust* wordt verminderd. In sommige omstandigheden kan dat aangewezen zijn. Bijvoorbeeld kan de afstand van (het gemeentehuis van) gemeente A tot (het stadhuis van) een stad B tot op de meter bekend zijn: 258226 m = 258,226 km. Maar het heeft geen zin om in A op een wegwijzer naar B deze nauwkeurige waarde te vermelden. Daarop is een *afgeronde* afstand van 258 km, slechts nauwkeurig tot op één kilometer dus, ruim voldoende. Men behoudt slechts drie van de zes beduidende cijfers. Het weggewerkte getaldeel is 0,226. Het is kleiner dan 0,500 waardoor 258 een betere benadering is van 258,226 dan 259. Het oorspronkelijke getal wordt op deze wijze *afgerond naar beneden*.

Als de afstand 258,726 km zou zijn, dan is het weg te werken gedeelte (0,726) groter dan 0,500 en is 259 de betere benadering, te bekomen door *afronding naar boven*.

Maar voor een afstand van 258,500 km is het weg te werken deel precies 0,500. Dan zijn 258 en 259 even goede benaderingen. Als bij het rekenen met veel getallen deze situatie veel voorkomt, is het beter daarbij even dikwijls naar boven als naar beneden af te ronden. Dat helpt bij het minimaliseren van de totale afrondingsfout bij het rekenen. Men spreekt af: als het laatste *te behouden* cijfer even is, dan wordt afgerond naar beneden, in het andere geval naar boven: 258,500 wordt 258, maar 253,500 wordt 254, en 259,500 wordt 260.

Voorbeelden

Afhankelijk van het aantal beduidende cijfers dat men wil behouden, kunnen volgende getallen op verschillende wijzen afgerond worden (de weg te werken decimalen werden telkens onderlijnd):

560,250 heeft zes beduidende cijfers. Vermindering ervan

tot vijf:	$560,250 = 560,25$	$0,000 < 0,005$: afronden naar beneden
tot vier:	$560,250 = 560,2$	$0,050$ en 2 is even: afronden naar beneden
tot drie:	$560,250 = 560$	$0,250 < 0,500$: afronden naar beneden
tot twee:	$560,250 = 560$	$0,250 < 5,000$: afronden naar beneden
tot één:	$560,250 = 600$	$60,250 > 50,000$

Sommige *onbeduidende* nullen (onderlijnd) blijven toch staan omdat ze de positie van de komma moeten aanwijzen.

Uit de context blijkt dat 15 605 000 zeven beduidende cijfers heeft. Vermindering ervan

tot zes:	$15\ 605\ 000$	
tot vijf:	$15\ 605\ 000$	
tot vier:	$15\ 605\ 000 = 15\ 600\ 000$	5000 en 0 is even
tot drie:	$15\ 605\ 000 = 15\ 600\ 000$	$05000 < 50000$
tot twee:	$15\ 605\ 000 = 16\ 000\ 000$	$605000 > 500000$
tot één:	$15\ 605\ 000 = 20\ 000\ 000$	$5605000 > 5000000$

5478,499 heeft zeven beduidende cijfers. Vermindering ervan

tot zes:	$5478,499 = 5478,50$	Die nul in het resultaat is beduidend.
tot vijf:	$5478,499 = 5478,5$	$0,099 > 0,050$
tot vier:	$5478,499 = 5478$	$0,499 < 0,500$
tot drie:	$5478,499 = 5480$	$8,499 > 5,000$
tot twee:	$5478,499 = 5500$	$78,499 > 50,000$
tot één:	$5478,499 = 5000$	$478,499 < 500,000$

Optellen en aftrekken

Bij het optellen en aftrekken van getallen bepaalt de term met het minst aantal beduidende cijfers *na de komma*, meteen ook de nauwkeurigheid van het resultaat. Dat verschil of die som heeft nooit méér beduidende cijfers *na de komma* dan de bewuste term. Het is gebruikelijk alle termen eerst af te ronden tot dit kleinste aantal beduidende decimalen vooraleer de som te maken.

Voorbeelden:

$$3,6422 + 12,879 = 16,521 \quad (\text{hoogstens 3 beduidende cijfers na de komma})$$

$$83,422 - 72 = 11 \quad (\text{geen beduidende cijfers na de komma})$$

$$14,8641 + 4,58 - 7,186 + 0,36855 = 12,62$$

Als er getallen bij zijn met onbeduidende nullen vóór de komma, worden die best eerst herschreven zonder beduidende nullen:

$$1500000 + 2270000 = 1,50 \times 10^6 + 2,27 \times 10^6 = 3,77 \times 10^6$$

$$\text{of} \quad 1500000 + 2270000 = 1,50 \text{ miljoen} + 2,27 \text{ miljoen} = 3,77 \text{ miljoen}$$

$$1500000 + 2270000 = 1,5 \times 10^6 + 2,3 \times 10^6 = 3,8 \times 10^6$$

$$\text{of} \quad 1500000 + 2270000 = 1,5 \text{ miljoen} + 2,3 \text{ miljoen} = 3,8 \text{ miljoen}$$

In het eerste geval hebben beide getallen 3 beduidende cijfers, in het tweede geval heeft het eerste getal slechts twee beduidende cijfers. Beide getallen moeten wel met dezelfde macht van 10 worden voorgesteld.

Vermenigvuldigen en delen

Bij het vermenigvuldigen en delen van getallen, bepaalt de term met het minst aantal beduidende cijfers, meteen ook de nauwkeurigheid van het resultaat. Dat produkt of quotiënt heeft nooit meer beduidende cijfers dan de beschouwde factor. Bij het worteltrekken blijft het aantal beduidende cijfers behouden. *De positie van de komma is hierbij niet van belang.*

Voorbeelden:

$$3,45 : 56,2 = 0,0614$$

$$2,3 \times 568000 = 1300000 \quad (\text{alle nullen onbeduidend})$$

$$1,648 : 0,023 = 72$$

$$\sqrt{38,7} = 6,22$$

Let wel op! Als er 7 identieke voorwerpen zijn met een gewicht van 8,466 kg, dan wegen die samen $7 \times 8,466 = 59,26$ kg. Het resultaat heeft hier wel degelijk 4 bedui-

dende cijfers. Dat komt omdat het getal 7 hier gegarandeerd 7,00000... is met een oneindig aantal *beduidende* nullen. Het andere getal (8,455) beperkt het resultaat echter tot 4 beduidende cijfers.

Schijnbaar geven rekenmachines soms nauwkeurigere resultaten. Voer je bijvoorbeeld het getal 66,4 in de machine, dan is dit getal in principe de afronding van om het even welk getal begrepen tussen 66,35 en 66,44. Je bent voor je berekeningen echter tevreden met deze afgeronde waarde. De machine beschouwt dat getal echter als 66,400000... met een aantal nullen afhankelijk van het type machine. Die extra nullen zijn dan vanzelfsprekend niet beduidend, maar de machine zal er mee rekenen alsof ze dat wel zijn.

Meer voorbeelden

Schrijf zonder machten van 10:

$$4,823 \times 10^7 = 48\,230\,000$$

$$8,4 \times 10^{-6} = 0,000\,0084$$

$$3,80 \times 10^{-4} = 0,000\,380$$

$$1,86 \times 10^5 = 186\,000$$

$$300 \times 10^8 = 30\,000\,000\,000$$

$$70\,000 \times 10^{-10} = 0,000\,007\,0000$$

Hoeveel beduidende cijfers hebben de volgende meetresultaten?

149,8 m (4)

0,0028 kg (2)

149,80 m (5)

0,00280 m (3)

1,00280 m (6)

9 g (1)

9 auto's (oneindig)

$4,0 \times 10^3$ ton (2)

$7,584 \times 10^{-5}$ s (4)

Schrijf in de wetenschappelijke notatie:

$$24\,380\,000 = 2,438 \times 10^7 \quad (\text{als er 4 beduidende cijfers zijn})$$

$$0,000009852 = 9,852 \times 10^{-6} \quad (\text{als er 4 beduidende cijfers zijn})$$

$$7\,300\,000\,000 = 7,30 \times 10^9 \quad (\text{als er 3 beduidende cijfers zijn})$$

$$0,00018400 = 1,840 \times 10^{-4} \quad (\text{als er 4 beduidende cijfers zijn})$$

Bereken (enkel beduidende cijfers gebruiken):

$$48,0 \times 943 = 45300 \quad (3 \text{ beduidende cijfers})$$

$$8,35/87 = 0,096 \quad (2 \text{ beduidende cijfers})$$

$$28 \times 4193 \times 185 = 22\,000\,000 \quad (2 \text{ beduidende cijfers})$$

$$14,8641 + 4,58 - 9,618 + 0,5322 = 10,36 \quad (2 \text{ beduidende cijfers na de komma})$$

Gegeven de getallen 4,35 8,65 2,95 12,45 6,65 7,55 9,75
Hun som is 4,35 + 8,65 + 2,95 + 12,45 + 6,65 + 7,55 + 9,75 = 52,35

Stel nu dat we om een of andere reden al deze getallen willen afronden tot op slechts één cijfer na de komma. Gebeurde dat afronden met de regel vermeld in de tekst, dan wordt de som ervan:

$$4,4 + 8,6 + 3,0 + 12,4 + 6,6 + 7,6 + 9,8 = 52,4$$

Sommigen ronden echter het cijfer 5 *altijd* af naar boven. Dat geeft:

$$4,4 + 8,7 + 3,0 + 12,5 + 6,7 + 7,6 + 9,8 = 52,7$$

Constateer nu dat de eerste afrondingsmethode duidelijk een betere benadering geeft voor de som.

TE ONTHOUDEN

Bij het rekenen worden enkel de *beduidende cijfers* van een getal gebruikt. Ze worden geteld vanaf het eerste cijfer verschillend van nul tot het laatste cijfer dat door meting of beredenering kan verantwoord worden.

Bij het *optellen en aftrekken* van getallen bepaalt de term met het minst aantal beduidende cijfers *na de komma*, meteen ook de nauwkeurigheid van het resultaat. Dat resultaat heeft nooit méér beduidende cijfers *na de komma* dan de bewuste term.

Bij het *vermenigvuldigen en delen* van getallen, bepaalt de factor met het minst aantal beduidende cijfers, meteen ook de nauwkeurigheid van het resultaat. Dat heeft nooit meer beduidende cijfers dan de beschouwde factor. *De positie van de komma is hierbij niet van belang.* Bij de machtsverheffing en de worteltrekking blijft het aantal beduidende cijfers behouden.